

**Extensions simples et extensions finies - TD 2**

1. Montrer que  $\text{Frac}(\mathbb{Z}[i]) = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q}[i] = \mathbb{Q}(i)$ .
2. Soit  $E/F$  et  $a, b \in E$ . Montrer que  $F(a, b) = F(a)(b) = F(b)(a)$ .
3. Soient  $F \subseteq E \subseteq K$  des corps tels que  $K$  est une extension simple de  $F$ . Montrer que  $K$  est une extension simple de  $E$ .
4. Soit  $E/F$ . Nous avons  $[E : F] = 1 \Leftrightarrow E = F$ .
5. Soit  $F$  un corps fini avec  $|F| = q$ , et soit  $E/F$  avec  $[E : F] = n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que  $E$  est un corps fini avec  $|E| = q^n$ .
6. Si  $F$  est un corps fini, alors  $|F| = p^n$  pour un certain  $n \in \mathbb{N}^*$ , où  $p = \text{car}F$ .
7. Soient  $F \subseteq E \subseteq K$  des corps tels que  $[K : F] = p$ , où  $p$  est un nombre premier. Dans ce cas, soit  $K = E$  soit  $E = F$ . De plus,  $K$  est une extension simple de  $F$ .
8. Soient  $F_1 \subseteq F_2 \subseteq \dots \subseteq F_n$  des corps, avec  $n \geq 3$ . Montrer que

$$[F_n : F_1] = \prod_{i=1}^{n-1} [F_{i+1} : F_i].$$